

Theorem 1 (Dominated convergence of Lebesgue) Assume that g is an integrable function defined on the measurable set E and that $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a sequence of measurable functions so that $|f_n| \leq g$. If f is a function so that $f_n \rightarrow f$ almost everywhere then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f.$$

PROOF: The function $g - f_n$ is non-negative and thus from Fatou lemma we have that $\int(g - f) \leq \liminf \int(g - f_n)$. Since $|f| \leq g$ and $|f_n| \leq g$ the functions f and f_n are integrable and we have

$$\int g - \int f \leq \int g - \limsup \int f_n,$$

so

$$\int f \geq \limsup \int f_n.$$

Θεώρημα 2 (Κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue) Έστω ότι η g είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση ορισμένη στο μετρήσιμο σύνολο E και η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων ώστε $|f_n| \leq g$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση f ώστε η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ να τείνει στην f σχεδόν παντού. Τότε

$$\lim \int f_n = \int f.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Η συνάρτηση $g - f_n$ είναι μη αρνητική και άρα από το Λήμμα του Fatou ισχύει $\int(f - g) \leq \liminf \int(g - f_n)$. Επειδή $|f| \leq g$ και $|f_n| \leq g$ οι f και f_n είναι ολοκληρώσιμες, έχουμε

$$\int g - \int f \leq \int g - \limsup \int f_n,$$

άρα

$$\int f \geq \limsup \int f_n.$$

(Russian translated by Google (probably erratic), hyphenation not enabled):

теорема 3 Предположим, что g является интегрируемая функция, определенная на измеримом множестве E и $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ представляет собой последовательность измеримой функции, так что $|f_n| \leq g$. Если f является функцией, так что $f_n \rightarrow f$ почти везде тогда

$$\lim \int f_n = \int f.$$

Theorem 4 (Dominated convergence of Lebesgue) Assume that g is an integrable function defined on the measurable set E and that $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a sequence of measurable functions so that $|f_n| \leq g$. If f is a function so that $f_n \rightarrow f$ almost everywhere then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f.$$

PROOF: The function $g - f_n$ is non-negative and thus from Fatou lemma we have that $\int(g - f) \leq \liminf \int(g - f_n)$. Since $|f| \leq g$ and $|f_n| \leq g$ the functions f and f_n are integrable and we have

$$\int g - \int f \leq \int g - \limsup \int f_n,$$

so

$$\int f \geq \limsup \int f_n.$$

Θεώρημα 5 (Κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue) Έστω ότι η g είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση ορισμένη στο μετρήσιμο σύνολο E και η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων ώστε $|f_n| \leq g$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση f ώστε η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ να τείνει στην f σχεδόν παντού. Τότε

$$\lim \int f_n = \int f.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Η συνάρτηση $g - f_n$ είναι μη αρνητική και άρα από το Λήμμα του Fatou ισχύει $\int(f - g) \leq \liminf \int(g - f_n)$. Επειδή $|f| \leq g$ και $|f_n| \leq g$ οι f και f_n είναι ολοκληρώσιμες, έχουμε

$$\int g - \int f \leq \int g - \limsup \int f_n,$$

άρα

$$\int f \geq \limsup \int f_n.$$

(Russian translated by Google (probably erratic), hyphenation not enabled):

теорема 6 Предположим, что g является интегрируемая функция, определенная на измеримом множестве E и $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ представляет собой последовательность измеримой функции, так что $|f_n| \leq g$. Если f является функцией, так что $f_n \rightarrow f$ почти везде тогда

$$\lim \int f_n = \int f.$$

Theorem 7 (Dominated convergence of Lebesgue) Assume that g is an integrable function defined on the measurable set E and hat $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a sequence of measurable function so that $|f_n| \leq g$. If f is a function so that $f_n \rightarrow f$ almost everywhere then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f.$$

PROOF: The function $g - f_n$ is non-negative and thus from Fatou lemma we have that $\int(g - f) \leq \liminf \int(g - f_n)$. Since $|f| \leq g$ and $|f_n| \leq g$ the functions f and f_n are integrable and we have

$$\int g - \int f \leq \int g - \limsup \int f_n,$$

so

$$\int f \geq \limsup \int f_n.$$

Θεώρημα 8 (Κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue) Έστω ότι η g είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση ορισμένη στο μετρήσιμο σύνολο E και η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων ώστε $|f_n| \leq g$. Προθέτουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση f ώστε η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ να τείνει στην f σχεδόν παντού. Τότε

$$\lim \int f_n = \int f.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Η συνάρτηση $g - f_n$ είναι μη αρνητική και άρα από το Λήμμα του Fatou ισχύει $\int(f - g) \leq \liminf \int(g - f_n)$. Επειδή $|f| \leq g$ και $|f_n| \leq g$ οι f και f_n είναι ολοκληρώσιμες, έχουμε

$$\int g - \int f \leq \int g - \limsup \int f_n,$$

άρα

$$\int f \geq \limsup \int f_n.$$

(Russian translated by Google (probably erratic), hyphenation not enabled):

теорема 9 Предположим, что g является интегрируемая функция, определенная на измеримом множестве E и $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ представляет собой последовательность измеримой функции, так что $|f_n| \leq g$. Если f является функцией, так что $f_n \rightarrow f$ почти везде тогда

$$\lim \int f_n = \int f.$$

4th century bce Greek:

ΥΜΝΟΣ ΗΡΗΣ

ΚΥΑΝΕΟΙΣ ΚΟΛΠΟΙΣΙΝ ΕΝΗΜΕΝΗ ΑΕΡΟΜΟΡΦΕ
ΗΡΑ ΓΑΜΒΑΣΙΛΕΙΑ ΔΙΟΣ ΞΥΛΛΕΚΤΡΕ ΜΑΚΑΙΡΑ
ΨΥΧΟΤΡΟΦΟΥΣ ΑΥΡΑΣ ΘΝΗΤΟΙΣ ΠΑΡΕΧΟΥΣΑ ΠΡΟΣΗΝΕΙΣ
ΟΜΒΡΩΝ ΜΕΝ ΜΗΤΗΡ ΑΝΕΜΩΝ ΤΡΟΦΕ ΠΑΝΤΟΓΕΝΕΘΛΕ
ΧΩΡΙΣ ΓΑΡ ΞΕΘΕΝ ΟΥΔΕΝ ΟΛΩΣ ΖΩΗΣ ΦΥΞΙΝ ΕΓΝΩ
ΚΟΙΝΩΝΕΙΣ ΓΑΡ ΑΓΑΣΙ ΚΕΚΡΑΜΕΝΗ ΗΕΡΙ ΞΕΜΝΩΙ
ΠΑΝΤΩΝ ΓΑΡ ΚΡΑΤΕΕΙΣ ΜΟΥΝΗ ΠΑΝΤΕΣΣΙ Τ ΑΝΑΣΞΕΙΣ
ΗΕΡΙΟΙΣ ΡΟΙΖΟΙΣΙ ΤΙΝΑΣΣΟΜΕΝΗ ΚΑΤΑ ΧΕΥΜΑ
ΑΛΛΑ ΜΑΚΑΙΡΑ ΘΕΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΕ ΓΑΜΒΑΣΙΛΕΙΑ
ΕΛΘΟΙΣ ΕΥΜΕΝΕΟΥΣΑ ΚΑΛΩΙ ΓΗΘΟΝΤΙ ΠΡΟΣΩΓΩΙ

6th century bce Greek:

ΥΜΝΟΣ ΘΡΗΣ

ΚΥΑΝΕΟΙΣ ΚΟΠΟΙΣΙΝ ΕΝΘΜΕΝΘ ΑΕΡΟΜΟΡΦΕ
ΘΡΑ ΓΑΜΒΑΣΙΛΕΙΑ ΔΙΟΣ ΣΥΓΓΕΚΤΡΕ ΜΑΚΑΙΡΑ
ΨΥΧΟΤΡΟΦΟΥΣ ΑΥΡΑΣ ΘΝΗΤΟΙΣ ΠΑΡΕΧΟΥΣΑ ΠΡΟΣΘΕΝΕΙΣ
ΟΜΒΡΩΝ ΜΕΝ ΜΗΤΗΡ ΑΝΕΜΩΝ ΤΡΟΦΕ ΠΑΝΤΟΓΕΝΕΘΡΕ
ΧΩΡΙΣ ΓΑΡ ΞΕΘΕΝ ΟΥΔΕΝ ΟΙΩΣ ΙΩΘΣ ΦΥΞΙΝ ΕΓΝΩ
ΚΟΙΝΩΝΕΙΣ ΓΑΡ ΑΓΑΣΙ ΚΕΚΡΑΜΕΝΘ ΘΕΡΙ ΞΕΜΝΩΙ
ΠΑΝΤΩΝ ΓΑΡ ΚΡΑΤΕΕΙΣ ΜΟΥΝΘ ΠΑΝΤΕΣΣΙ Τ ΑΝΑΣΣΕΙΣ
ΘΕΡΙΟΙΣ ΡΟΙΙΟΙΣΙ ΤΙΝΑΣΣΟΜΕΝΘ ΚΑΤΑ ΧΕΥΜΑ
ΑΓΓΑ ΜΑΚΑΙΡΑ ΘΕΑ ΡΟΙΥΩΝΥΜΕ ΓΑΜΒΑΣΙΛΕΙΑ
ΕΡΘΟΙΣ ΕΥΜΕΝΕΟΥΣΑ ΚΑΡΩΙ ΓΘΘΟΝΤΙ ΡΘΟΣΩΓΩΙ